поверхность расширяется, величина порогового давления растет. Сдвиговая деформация с дилатансией до определенного предела также протекает с упрочнением. В ходе сдвига меняется сцепление, с которым в значительной мере связано упрочнение. Кроме того, увеличение эффективного объема, обусловленное дилатансией, приводит в стесненных условиях к увеличению давления, следовательно, согласно диаграмме предельной поверхности, к росту эффективной прочности. Возникает эффект дилатансионного упрочнения. Но существует некоторый порог, после чего дилатансия прекращается. Вероятно, это происходит, когда дилатансия и уплотнение компенсируют друг друга. Таким образом, существует взаимосвязь между пороговым давлением, величиной пористости, соответствующей текущему состоянию среды, и началом разупрочнения, соответственно, и началом интенсивного разрушения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31212, 13-97057, 13-01-97058).

М. И. Киндер

Казанский (Приволжский) федеральный университет, mkinder@rambler.ru

ОБ ИДЕАЛЬНЫХ И СОВЕРШЕННЫХ РАЗБИЕНИЯХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел называется разбиением числа. Разбиения изучаются в задачах, прежде всего, комбинаторного и теоретико-числового характера. К классическим комбинаторным относятся задачи подсчета и перечисления разбиений данного типа, в теории чисел решают проблемы об аддитивных представлениях чисел с арифметическими ограничениями на слагаемые.

Разбиение неотрицательного целого числа $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ назовем *идеальным*, если каждое целое число m от 0 до M можно представить единственным образом в виде $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \ldots + \alpha_s m_s$, где каждое $i \in \{-1, 0, 1\}$, при этом повторяющиеся части m_i считаются неразличимыми. Если все части разбиения m_i рассматривать как разновесы для весов, каждое такое представление указывает единственный способ взвешивания массы m с помощью гирь массой m_i. При этом $\alpha_i = 0$ означает, что гиря с массой m_i не участвует во взвешивании, а в случае $\alpha_i = -1$ $(\alpha_i = 1)$ гиря m_i находится на той же (на другой) чашке весов, что и масса m.

Известно [1], [2], что количество идеальных разбиений числа совпадает с количеством упорядоченных разложений числа $2M+1$ в произведение натуральных чисел без единичных множителей. Пусть $N > 1$. Количество нетривиальных упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ зависит только от показателей $n_1, n_2, \ldots, n_s$, обозначим это количество через $T(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Теорема 1. *Для натуральных чисел, разложения которых не содержат квадратов простых чисел, справедливо рекуррентное соотношение*

$$T(1^s) = \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k \, T(1^k)\,, \qquad T(1^0) = 1.$$

В следующих теоремах отмечается связь известных комбинаторных чисел и специальных функций с функцией $T(n_1, n_2)$.

Теорема 2. *Количество упорядоченных факторизаций числа* $N = p_1p_2\dots p_s$ *равно экспоненциальному числу Белла порядка* s, *то есть*

$$T(1,1,\dots,1) = \sum_{k=1}^{s} k\,!\,S(s,k) = \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i i^s\,,$$

где $S(s,k)$ – *число Стирлинга второго рода.*

Теорема 3. *Количество упорядоченных факторизаций числа* $N = p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ *равно*

$$T(n_1,n_2) = (-1)^{n_1}2^{n_2-1}P_{n_1}^{(n_2-n_1,\,0)}(-3) =$$
$$= \frac{2^{n_1-n_2-1}}{n_1!}\cdot\frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}}\Big[(1+x)^{n_1}(1-x)^{n_2}\Big]\Big|_{x=-3}\,,$$

где $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ – *многочлен Якоби степени* n.

ЛИТЕРАТУРА

1. MacMahon P. A. *Memoir on the theory of the compositions of numbers* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A). – 1893. – V. 184. – P. 835–901.

2. Knopfmacher A., Mays M. *Ordered and unordered factorizations of integers* // Math. J. – 2006. – V. 10. – P. 72–89.